

---

---

# THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES

---

---

Chapitre 4 sur 6 :

**Etude de la fonction  $\zeta$   
de RIEMANN et du nombre  $\pi$**

---

---

par WEIDMANN Sébastien

(travaux débutés en Octobre 2006)

# Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Le **Chapitre 4** est un chapitre important mais il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Travaux en 6 Chapitres, débutés en Octobre 2007. Tous droits réservés à **WEIDMANN Sébastien**, né à Chaumont (52 000), FRANCE.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord.**

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscription est relativement simple) :

*(ne vous attendez pas à une réponse systématique de ma part)*

[Cliquez ici pour m'envoyer un mail \(message privé, pseudo : \*\*WizartS\*\*\)](#)

# Chapitre 4 :

## Etude de la fonction $\zeta$ de RIEMANN et du nombre $\pi$

Modifications éventuelles et droits d'utilisation / mail . . . . .	2
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Etude de la fonction <math>\zeta</math> (Zêta)</b>	<b>7</b>
1.1 Première approche . . . . .	7
1.1.1 Piste d'écritures équivalentes à la fonction $\zeta$ . . . . .	8
1.1.2 La fonction $\zeta$ assimilable à la fonction $A$ . . . . .	13
1.1.3 Etude de la fonction assimilable $A(s)$ . . . . .	15
1.2 Travaux en cours de réalisation . . . . .	22



# Introduction

Le but de ce chapitre est de rechercher une méthode qui permette de simplifier ou de rendre le calcul optimal afin d’obtenir des nombres premiers. Nous avons vu effectivement dans le **Chapitre 1** (partie “**3.8.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par  $M$ , généralisation**”) que des simplifications étaient possibles afin de limiter la longueur des calculs due à la factorielle dans la formule de  $s(M)$ . Il devient donc naturel de se demander s’il existe une expression mathématique équivalente qui limite les calculs au strict nécessaire.

## Remarque préalable :

Comme dans les chapitres précédents, les crochets ne signifient pas “partie entière”, ils ont la même fonction que de simples parenthèses.



# 1

## Etude de la fonction $\zeta$ (Zêta)

Pour commencer, nous allons aborder la fonction  $\zeta$  par une première approche (faible) permettant d'établir un lien entre la somme des fonctions  $\zeta(s)$  lorsque  $s$  varie de 1 à l'infini et une fonction "simple".

Puis, nous verrons que la fonction  $\zeta$  peut être vue comme étant un cas particulier de fonction qui peut s'inscrire dans un type de fonction plus "générale" (approche moins simple).

**Rappel :**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

### 1.1 Première approche

De manière "faible" (c'est-à-dire de manière relativement simple), nous pouvons établir un lien entre chaque fonction  $\zeta$  lorsque  $s$  varie telle que  $s \in \mathbb{N}$ , en effectuant la somme des fonctions  $\zeta$  pour chaque  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 1$  (le cas de  $s = 0$  n'étant pas indispensable, nous l'évitons par anticipation).

### 1.1.1 Piste d'écritures équivalentes à la fonction $\zeta$

Dans un premier temps, notons cette somme :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \zeta(1) + \zeta(2) + \zeta(3) + \zeta(4) + \zeta(5) + \zeta(6) + \zeta(7) + \zeta(8) + \dots$$

En étalant la somme sur plusieurs lignes (chaque ligne correspond à une égalité de  $\zeta(s)$  pour une valeur de  $s$  unique) :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = & \quad \textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{\frac{1}{2}} + \textcolor{blue}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ & \quad \textcolor{blue}{+1} + \textcolor{red}{\frac{1}{2^2}} + \textcolor{blue}{\frac{1}{3^2}} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \\ & \quad \textcolor{blue}{+1} + \textcolor{red}{\frac{1}{2^3}} + \textcolor{blue}{\frac{1}{3^3}} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \dots \\ & \quad \textcolor{blue}{+1} + \textcolor{red}{\frac{1}{2^4}} + \textcolor{blue}{\frac{1}{3^4}} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \dots \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Or, l'égalité présentée sous cette forme nous permet de faire apparaître qu'une somme de chaque colonne (à chaque début de ligne, un exemple de groupe est repéré en rouge, un autre exemple est repéré en bleu) nous donne une nouvelle égalité :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} (1) + \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \right)$$

Or, nous savons que pour  $0 < u < 1$  :

$$\sum_{s=0}^{s \rightarrow +\infty} u^s = 1 + \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} u^s = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \dots = \frac{1}{1-u}$$

D'où 
$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} u^s = \frac{1}{1-u} - 1$$



Et d'où nous pouvons également déduire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \right) \\
&= \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} - 1 \right) + \dots \\
&= \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Et donc finalement une formule générale pour  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) &= \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} (1) + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right) \\
&= \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} (1) - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} (1) + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\
&= 1 + \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} (1) - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} (1) + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)
\end{aligned}$$

Or, le nombre d'éléments contenu dans chacune des sommes étant identique, nous pouvons conclure que :

$$\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} (1) = \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} (1)$$

D'où

$$\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} (1) - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} (1) = 0$$

D'où nous déduisons également que :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

La divergence de  $\zeta(1)$  implique la divergence de cette formule. Afin d'éviter la divergence due à  $\zeta(1)$ , nous allons essayer d'exprimer cette somme en fonction de  $s$  compris entre 2 et  $+\infty$ .

D'autre part, prenons en considération cette égalité pour  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 2$  :

$$V(x) = 1 + \sum_{k=2}^{k=x} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

Nous pouvons donner les valeurs de cette formule en fonction de  $x$  :

$$\begin{aligned} V(2) &= -\frac{1}{2} \\ V(3) &= -\frac{5}{3} \\ V(4) &= -\frac{11}{4} \\ V(5) &= -\frac{19}{5} \\ V(6) &= -\frac{29}{6} \\ V(7) &= -\frac{41}{7} \\ V(8) &= -\frac{55}{8} \\ &\dots \\ V(x) &= -\frac{x(x-1)-1}{x} \end{aligned}$$

Donc

$$1 + \sum_{k=2}^{k=x} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = -\frac{x(x-1)-1}{x}$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{k=x} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = \sum_{k=2}^{k=x} \left( \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^{k=x} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

De plus,

$$\zeta(1) = \sum_{k=1}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \right) = 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \right) = \zeta(1) - 1$$

Pour finir, nous avons vu que :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = -1 + \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$$

Ce que nous pouvons également écrire :

$$\sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = -1 + \zeta(1) + \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) &= 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\
 &= 1 + [\zeta(1) - 1] - \left[ \zeta(1) - 1 + \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) \right]
 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 1 - \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{x(x-1)-1}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + x - 1 - \frac{1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Ce qui permet, d'une part, de conclure que la série diverge :

$$\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty$$

### 1.1.2 La fonction $\zeta$ assimilable à la fonction $A$

Dans un second temps, nous pouvons apporter une précision sur le comportement de  $\zeta(s)$  pour  $s \in \mathbb{N}$  et au voisinage de  $+\infty$ . Rappelons que :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \zeta(1) + \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) \quad \text{Et} \quad \zeta(1) = 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) &= -\zeta(1) + \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) \\ &= -\left[1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}\right] + \sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) \end{aligned}$$

Or, nous avons vu que :

$$\sum_{s=1}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) &= -1 - \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} + 1 + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right) \\ &= -\sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{k \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k-1)}\right] \end{aligned}$$

*(ce qui permet également de déduire la divergence de l'égalité)*

Le nombre d'éléments étant le même dans les sommes de chacun des 2 membres, nous pouvons ramener la variable  $k$  à  $k = s$ , ce qui nous permet d'écrire plus simplement que :

$$\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right]$$

Le nombre d'éléments étant le même dans les sommes de chacun des 2 membres, cette dernière égalité nous permet d'établir que la fonction  $\zeta(s)$  est "globalement assimilable" (c'est-à-dire pour l'ensemble des valeurs de  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $s \geq 2$ , ou encore pour  $s \in [2; +\infty[$ ) à la formule suivante :

$$1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

D'où l'équivalence au voisinage de  $+\infty$  :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = 1$$

Notons  $A$  la fonction assimilable à la fonction  $\zeta$  telle que :

$$A(s) = 1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

Et donc, telle que :

$$\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} A(s)$$

### 1.1.3 Etude de la fonction assimilable $A(s)$

- Dans un dernier temps, nous pouvons faire l'étude de la fonction  $A$  précédente assimilée à  $\zeta$ . Nous avons noté  $A(s)$  la formule correspondante :

$$A(s) = 1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

$A(s)$  ne possède que 2 pôles réels : 1 pôle en 0 et un autre en 1. D'autre part,  $A(s)$  ne possède aucune racine réelle et ne peut par conséquent jamais être nulle pour  $s \in \mathbb{R}$ .

Au passage à la limite en 1, nous obtenons :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = +\infty$$

La divergence de cette formule en  $s = 1$  reste cohérente quant à l'assimilation de  $A(s)$  à  $\zeta(s)$  en  $s = 1$ , puisque  $\zeta(s)$  est elle aussi divergente en ce point. Ce qui permet d'étendre l'intervalle d'assimilation de  $A(s)$  à  $\zeta(s)$  jusqu'en  $s = 1$ , c'est-à-dire pour  $s \in \mathbb{N}$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

De plus,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = +\infty$$

Rappelons qu'au voisinage de  $+\infty$  :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = 1$$

Etendons le raisonnement au voisinage de  $-\infty$  :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = 1$$

- Dérivée de  $A(s)$  :

$$A'(s) = -\frac{2s-1}{s^2 \cdot (s-1)^2} \quad (\text{cette écriture révèle les 2 pôles et une racine réels})$$

Ce qui est équivalent à (cette écriture est utile pour les limites en l'infini) :

$$A'(s) = \frac{-1}{s(s-1)} \cdot \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right)$$

Nous pouvons alors étudier  $A'(s)$  :

$A'(s)$  ne possède que 2 pôles réels : 1 pôle en 0 et un autre en 1. D'autre part,  $A'(s)$  possède une unique racine réelle en  $s = \frac{1}{2}$ , d'où  $A'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

Etude des limites :

$$\blacktriangleright \lim_{s \rightarrow -\infty} A'(s) = 0$$

$$\blacktriangleright \lim_{s \rightarrow 0} A'(s) = +\infty$$

$A'$  est donc positive sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$ .

$$\blacktriangleright A'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ donc } A' \text{ coupe l'axe des abscisses une seule fois en } s = \frac{1}{2}.$$

$A'$  est donc positive sur l'intervalle  $]0; \frac{1}{2}[$ .

$$\blacktriangleright \lim_{s \rightarrow 1} A'(s) = -\infty$$

$A'$  est donc négative sur l'intervalle  $]\frac{1}{2}; 1[$ .

$$\blacktriangleright \lim_{s \rightarrow +\infty} A'(s) = 0$$

$A'$  est donc négative sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .



- Cette étude permet de tirer des conclusions sur les caractéristiques de  $A(s)$  :

$A$  ne possédant aucune racine réelle, elle ne peut par conséquent jamais être couper l'axe des abscisses.

$A$  est strictement croissante sur l'intervalle  $] - \infty; 0[$  avec une convergence vers 1 en  $-\infty$  et une divergence vers  $+\infty$  en 0. Comme  $A$  ne coupe jamais l'axe des abscisses, elle est donc positive sur cet intervalle.

$A$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; \frac{1}{2}[$  ,

$A$  atteint un maximum pour  $s = \frac{1}{2}$  , donné par  $A\left(\frac{1}{2}\right) = -3$  ,

$A$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]\frac{1}{2}; 1[$  . Comme  $A$  ne coupe jamais l'axe des abscisses, elle est donc négative sur l'intervalle  $]0; 1[$  .

$A$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  avec une divergence vers  $+\infty$  en 1 et une convergence vers 1 en  $+\infty$  . Comme  $A$  ne coupe jamais l'axe des abscisses, elle est donc positive sur cet intervalle.

$A$  possède donc un axe de symétrie en  $s = \frac{1}{2}$ . En effet, donnons quelques valeurs de  $A$  en fonction de  $s$  :

*(voir page suivante)*

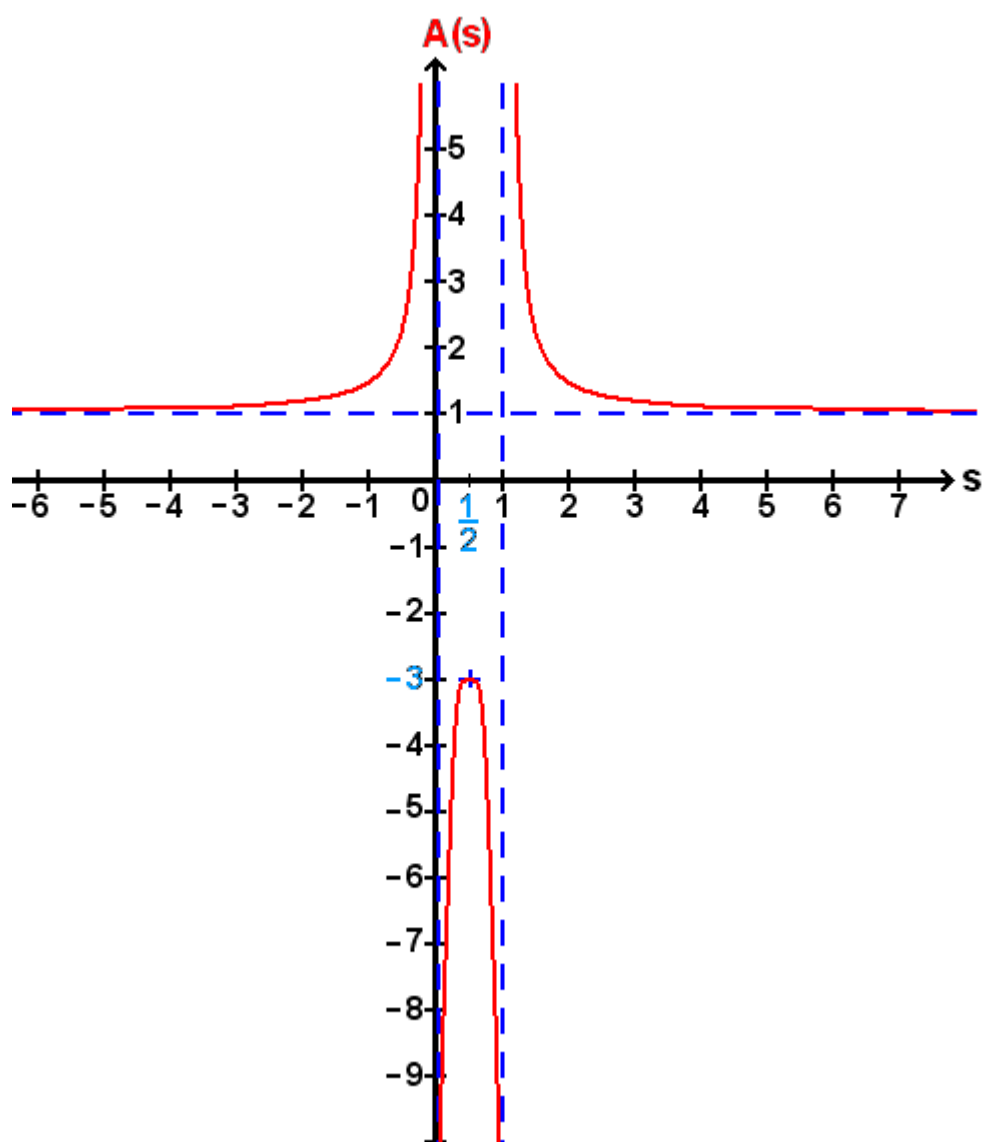
$$\begin{aligned}
A(-500) &= A(501) = 250501/250500 \\
&\dots \\
A(-250) &= A(251) = 62751/62750 \\
&\dots \\
A(-100) &= A(101) = 10101/10100 \\
&\dots \\
A(-50) &= A(51) = 2551/2550 \\
&\dots \\
A(-25) &= A(26) = 651/650 \\
&\dots \\
A(-6) &= A(7) = 43/42 \\
A(-5) &= A(6) = 31/30 \\
A(-4) &= A(5) = 21/20 \\
A(-3) &= A(4) = 13/12 \\
A(-2) &= A(3) = 7/6 \\
A(-1) &= A(2) = 3/2 \\
A(-1/2) &= A(3/2) = 7/3 \\
A(-1/4) &= A(5/4) = 21/5 \\
A(-1/8) &= A(9/8) = 73/9 \\
A(-1/16) &= A(17/16) = 273/17 \\
&\dots \\
A(-1/98) &= A(99/98) = 9703/99 \\
&\dots \\
A(1/99) &= A(98/99) = -9703/98 \\
&\dots \\
A(1/16) &= A(15/16) = -24/15 \\
A(1/8) &= A(7/8) = -73/9 \\
A(1/4) &= A(3/4) = -21/5 \\
A(1/3) &= A(2/3) = -13/4 \\
A(1/2) &= -3
\end{aligned}$$

La symétrie en  $s = \frac{1}{2}$  nous permet d'écrire que :

$$A(s) = A(1-s) \quad (\text{ce qui est d'ailleurs exact})$$

Et donc la connaissance de la symétrie de  $A$  en  $s = \frac{1}{2}$  et l'étude de  $A$  sur l'intervalle  $[1/2; +[$  suffisent pour connaître  $A$  intégralement.

Allure de la courbe :



- Rappelons que nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) &= \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} A(s) \\ &= \sum_{s=2}^{s \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \right]\end{aligned}$$

Ce qui établit clairement un lien entre  $\zeta(s)$  et  $A(s)$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

En développant :

$$\begin{aligned}A(s) &= 1 + \frac{1}{s(s-1)} \\ &= \frac{s^2 - s + 1}{s(s-1)}\end{aligned}$$

Nous constatons que  $(s^2 - s - 1)$  possède 2 racines complexes puisque pour :

$$s^2 - s + 1 = 0, \quad \text{le discriminant } \Delta \text{ vaut}$$

$$\Delta = 1 - 4 = 3.i^2$$

Et donc, les 2 racines  $s_1$  et  $s_2$  sont :

$$s_1 = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i.\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$s_2 = \frac{1 - i.\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i.\sqrt{\frac{3}{4}}$$

D'où

$$A(s) = \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s(s-1)}$$

Ce qui permet de constater que la formule  $A(s)$  s'annule pour 2 racines complexes  $s_1$  et  $s_2$  de partie réelle  $\frac{1}{2}$  et de partie imaginaire  $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ .

Or, il a été démontré que les 0 non triviaux tels que  $\zeta(s) = 0$  sont tous donnés par  $s$  un nombre complexe dont la partie réelle appartient à l'intervalle  $[0; 1]$ . Il nous reste à savoir si  $\zeta(s)$  peut encore être assimilée à  $A(s)$  sur cet intervalle (ou au moins sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ ), ce qui pourrait permettre de confirmer la conjecture de *RIEMANN*. Rappelons que cette conjecture stipule que les 0 non triviaux de  $\zeta(s)$  seraient donnés par des nombres complexes  $s$  qui auraient tous pour partie réelle la valeur  $\frac{1}{2}$ .

## 1.2 Travaux en cours de réalisation

# TRAVAUX EN COURS DE REALISATION !

*Note personnelle :*

Chapitre dont le travail est long, mais dont la version définitive devrait logiquement être à la hauteur de l'objectif que je vise ! Soyons patient...

---

---

Chapitre 5 sur 6 :

# Réflexions logiques et philosophiques

---

---

(Voir chapitre correspondant pour la suite)